

## МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КРИПТОГРАФИЧЕСКИ СТОЙКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА

А.А.Кузнецов, Ю.А.Избенко, И. Московченко

*Рассматриваются криптографические булевы функции, исследуются методы их построения. Предлагается метод построения криптографически стойких булевых функций на основе градиентного спуска.*

**1. Постановка проблемы в общем виде и анализ литературы.** Актуальным направлением развития криптографии является разработка и исследование криптографических булевых функций [1-4]. Так, например, блоки нелинейной подстановки симметричных шифров эффективно описываются в терминах булевой алгебры и дают мощный механизм их конструирования. В работе [5] теоретически доказано, что применение итеративных процедур градиентного поиска позволит формировать булевы функции с высокими показателями нелинейности и алгебраической степени, удовлетворяющих строгому лавинному критерию. Следовательно, разработка эффективных методов построения криптографически стойких булевых функций на основе градиентного поиска является актуальной научно-технической задачей.

**2. Предлагаемый метод построения криптографических булевых функций** является дальнейшим развитием эвристического метода градиентного подъема. Данный метод основан на использовании свойств нелинейных последовательностей, отличается от известных введением дополнительных процедур восстановления и модификации алгебраически нормальных форм булевых функций, и позволяет строить нелинейные булевы функции с высокими показателями стойкости.

В работе [6] показано, что для бент-функций справедливо выражение

$$N_{\text{бент}} = 2^{n-1} - 2^{n/2-1}, \quad (1)$$

при этом значения преобразования Уолша являются равномерно распределенными

$$|F(w)| = 2^{n/2} \quad (2)$$

для всех значений  $w$ ,  $w = 1, \dots, 2^n$ .

Для сбалансированных функций справедливо выражение [6]

$$N_f \leq 2^{n-1} - 2^{n/2-1} - 2. \quad (3)$$

Отметим, что нелинейность напрямую связана со значениями преобразования Уолша [6]:

$$F(w) = 2^n - 2 N_f. \quad (4)$$

Как видно из приведенных данных, чем выше значение нелинейности функции, тем меньше ее значения преобразования Уолша, и наоборот, чем выше значения преобразования Уолша функции, тем ниже ее нелинейность.

Основной идеей предлагаемого метода является эффективное понижение нелинейности заданных бент-последовательностей при каждой из  $2^{n/2-1}$  обязательных комплементаций. Для наглядной иллюстрации принципа работы предложенного метода в таблице 1 представлены расчетные данные для четных векторных пространств  $V_4 - V_{12}$ , принимаемые к рассмотрению при дальнейших расчетах. Так, в столбце 2 на основании (1) и (2) указана нелинейность (значение преобразования Уолша) бент-последовательностей, рассматриваемых как входные данные, в столбце 3 на основании (3) и (4) указана максимально достижимая нелинейность (макс. значение преобразования Уолша) функций, которые мы хотели бы получить в качестве выходных данных, и в столбце 4 указано количество бит, которое необходимо изменить в бент-последовательностях для получения желаемого результата.

Таблица 1. – Расчетные значения некоторых показателей булевых функций, полученных в соответствии с методом градиентного спуска

	Максимально достижимые показатели для бент-функций		Максимально достижимые показатели для сбалансированных функций   Наилучший известный результат		Необходимо изменить позиций в бент-последовательности
	$N_f$	$F(w)$	$N_f$	$F(w)$	
$V_4$	6	4	$\frac{4}{4}$	$\frac{8}{8}$	2 позиции
$V_6$	28	8	$\frac{26}{26}$	$\frac{12}{12}$	4 позиции
$V_8$	120	16	$\frac{118}{116}$	$\frac{20}{24}$	8 позиции
$V_{10}$	496	32	$\frac{494}{492}$	$\frac{36}{40}$	16 позиции
$V_{12}$	2016	64	$\frac{2014}{2010}$	$\frac{68}{76}$	32 позиции

Отметим, что само по себе изменение необходимого количества бит в бент-последовательности не гарантирует достижение нелинейности, близкой к максимальной. Так, например, если мы хотим модифицировать бент-последовательность над  $V_8$  ( $V_{10}$ ) и выполним необходимые 8 (16) комплементаций таблицы истинности, то может оказаться, что вместо желаемой сбалансированной высоконелинейной последовательности с нелинейностью 116 (492) мы получим последовательности с нелинейностью 112 (476). И чем больший размер векторного пространства мы используем, тем существенней будет разница между полученным и ожидаемым результатами. На рис.1 представлены возможные потери нелинейности при непосредственной комплементации необходимого числа позиций бент-последовательности.

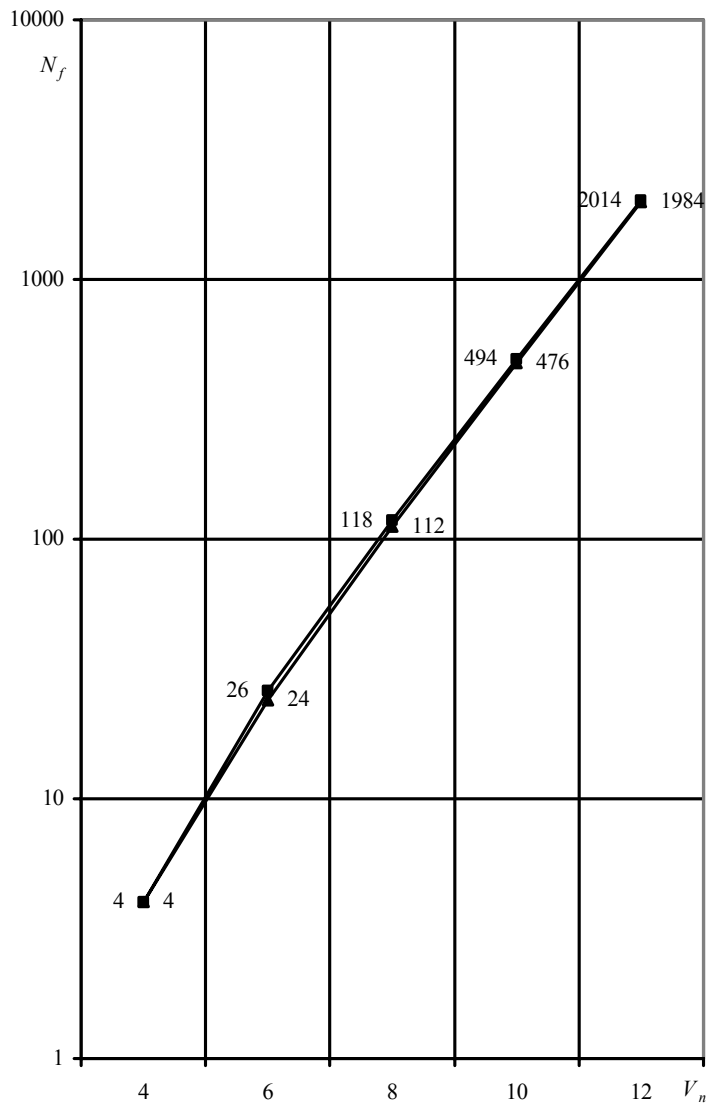


Рис. 1. – Возможные потери нелинейности при комплементации

Как показывает практика, такое различие между полученными и ожидаемыми значениями обусловлено тем, что каждый раз могут комплементироваться позиции, изменение которых влечет за собой только увеличение максимального значения преобразования Уолша (уменьшение нелинейности), т.е. все значения  $WH$  изменятся на +2. Следовательно, для достижения заданной верхней границы нелинейности необходимо из общего числа позиций  $x$  таблицы истинности, подлежащих комплементации, определить то число позиций  $y$ , изменение которых повлечет изменение  $WH$  на +2, и то число позиций  $z$ , изменение которых повлечет изменение  $WH$  на -2,  $x = y + z$ .

Расчетное соотношение для вычисления количества позиций в таблице истинности функции, которые необходимо инвертировать с целью получения максимально-достижимой нелинейности, представлено в Утверждении 1.

**Утверждение 1.** Для того, чтобы модифицировать бент-последовательность и получить сбалансированную последовательность,

обладающую максимально достижимой для сбалансированной функции нелинейностью, необходимо инвертировать  $n^-$  позиций таблицы истинности таким образом, чтобы все значения  $WH$  изменились на +2, и  $n^+$  позиций таблицы истинности таким образом, чтобы все значения  $WH$  изменились на -2, причем

$$n^- = Razn + \frac{NeedSteps - Razn}{2}, \quad (5)$$

$$n^+ = \frac{NeedSteps - Razn}{2} = NeedSteps - n^- \quad (6)$$

где  $NeedSteps$  – количество позиций в бент-последовательности, которые необходимо инвертировать,  $Razn$  – количество позиций в бент-последовательности, которые необходимо инвертировать для именения нелинейности с  $N_{бент}$  на  $N_{сбаланс}$ .

**Доказательство.** Согласно (1), (3), разница между  $N_{бент}$  и  $N_{сбаланс}$  равна 2. Такой разницы в нелинейности можно достичь, если произвести две комплементации таблицы истинности таким образом, чтобы все значения  $WH$  изменились на +2. Таким образом, из общего числа  $2^{n/2-1}$  обязательных комплементаций  $NeedSteps$ ,  $Razn$  комплементаций должно быть направлено на понижение нелинейности с  $N_{бент}$  на  $N_{сбаланс}$ . Оставшиеся  $NeedSteps - Razn$  комплементаций должны быть произведены таким образом, чтобы их суммарные данные были равны 0, т.е. они должны компенсировать друг друга. Следовательно, должно быть произведено

$$\frac{NeedSteps - Razn}{2}$$

комплементаций, при которых все значения  $WH$  изменились бы на +2 и

$$\frac{NeedSteps - Razn}{2}$$

комплементаций, при которых все значения  $WH$  изменились бы на -2. Таким образом, общее число комплементаций  $n^-$ , при которых нелинейность должна уменьшиться, будет определяться выражением (5). Общее число комплементаций  $n^+$ , при которых нелинейность должна увеличиться, будет определяться выражением (6), что и завершает доказательство.

Альтернативное доказательство утверждения 1 можно получить, проводя аналогичные рассуждения в терминах преобразования Уолша с той лишь разницей, что мы будем опираться на  $F_{бент}(w)$  и  $F_{сбаланс}(w)$ .

В таблице 2 представлены расчетные данные, отображающие необходимое число требуемых комплементаций бент-последовательности для заданного векторного пространства.

Поскольку в практических приложениях может возникнуть задача построения функций с заданной нелинейностью, представляется целесообразным дать обобщающую формулировку утверждения 1 в контексте получения булевых функций с заданной нелинейностью, полученных путем комплементации позиций таблицы истинности бент-последовательности.

Таблица 2 – Расчетные данные необходимого числа требуемых комплементаций бент-последовательности в соответствии с методом градиентного спуска

1	Необходимо изменить позиции в бент-последовательности, $NeedSteps$	Необходимо изменить значение нелинейности		Требуется для этого изменений, $n^-$ и $n^+$
		$N_f$ , с _ на _	$F(w)$ , с _ на _	
	2	3		4
$V_4$	2	6→4	4→8	$n^- = 2$ (изм-я с $F(w) = +2$ )
$V_6$	4	28→26	8→12	$n^- = 3$ (изм-я с $F(w) = +2$ ) $n^+ = 1$ (изм-я с $F(w) = -2$ )
$V_8$	8	120→116	16→24	$n^- = 6$ (изм-я с $F(w) = +2$ ) $n^+ = 2$ (изм-я с $F(w) = -2$ )
$V_{10}$	16	496→492	32→40	$n^- = 10$ (изм-я с $F(w) = +2$ ) $n^+ = 6$ (изм-я с $F(w) = -2$ )
$V_{12}$	32	2016→2010	64→76	$n^- = 19$ (изм-я с $F(w) = +2$ ) $n^+ = 13$ (изм-я с $F(w) = -2$ )

**Утверждение 2.** Для того, чтобы модифицировать бент-последовательность, обладающую нелинейностью  $N_{бент}$  и получить сбалансированную последовательность, обладающую требуемой нелинейностью  $N_{треб}$ , необходимо инвертировать  $n^-$  позиций таблицы истинности таким образом, чтобы все значения  $WH$  изменились на +2, и  $n^+$  позиций таблицы истинности таким образом, чтобы все значения  $WH$  изменились на -2, причем

$$n^- = Razn + \frac{NeedSteps - Razn}{2},$$

$$n^+ = \frac{NeedSteps - Razn}{2} = NeedSteps - n^-,$$

где переменная  $Razn$ , определенная в терминах нелинейности, имеет вид

$$Razn = N_{бент} - N_{треб}, \quad (7)$$

переменная  $Razn$ , определенная в терминах преобразования Уолша, имеет вид

$$Razn = \frac{F_{треб}(w) - F_{бент}(w)}{2}. \quad (8)$$

Доказательство утверждения аналогично доказательству Утверждения 1.

Результат последнего утверждения позволяет применить конструктивный подход к формированию сбалансированных высоко нелинейных булевых функций путем модификации бент-последовательности. Основным достоинством такого подхода являются высокие значения обеспечи-

ваемой нелинейности, которые лежат в теоретическом пределе (см. рис. 1). В целом предлагаемый метод структурно состоит из трех основных этапов.

На первом этапе используется метод градиентного спуска, позволяющий получить высоко нелинейную последовательность  $\xi = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2^n-1}$ , где  $n$  – размерность векторного пространства.

На втором этапе используется процедура восстановления алгебраической нормальной формы функции по выходной последовательности  $\xi$ . Использование данной процедуры позволяет по известной последовательности  $\xi = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2^n-1}$  восстановить исходную алгебраическую нормальную форму булевой функции.

На третьем этапе, в зависимости от среды практического приложения, используется процедура модификации алгебраической нормальной формы функции  $f(x)$ , позволяющая при сохранении основных показателей стойкости нелинейного преобразования (сбалансированности и нелинейности) путем применения аффинных преобразований  $f(xA) \setminus f(C_f x)$  изменить вид что позволит улучшить либо динамические свойства нелинейного преобразования (матрица  $A$ ), либо корреляционные свойства (матрица  $C_f$ ).

**3. Выводы.** В результате проведенных исследований разработан метод построения криптографически стойких булевых функций на основе градиентного спуска. Показано, что практическое использование разработанного метода позволяет формировать криптографические булевы функции с высокими показателями стойкости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Горбенко И.Д., Потий А.В., Избенко Ю.А. Исследование аналитических и статистических свойств булевых функций криптоалгоритма Rijndael (FIPS 197). Радиотехника. Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник. - 2004. - № 126. - С. 132 - 138.
2. S.Maitra, E.Pasalic. Further constructions of resilient Boolean functions with very high nonlinearity. Accepted in SETA, May, 2001, Norway.
3. E.Pasalic, T.Johansson. Further Results on the Relation Between Nonlinearity and Resiliency for BF. *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol 48, No. 7, July 2002, 1825-1834
4. E.Pasalic, T.Johansson, S.Maitra, P.Sarkar. New constructions of resilient and correlation immune Boolean functions achieving upper bounds of nonlinearity. In Workshop of Coding and Cryptography, Electronic Notes in Discrete Mathematics. Elsevier, January 2001.
5. W. Millan, A. Clark and E. Dawson. Heuristic Design of Cryptographically Strong Balanced Boolean Functions. In Advances in Cryptology EUROCRYPT'98, pages 489–499. Springer Verlag LNCS 1403, 1998.
6. W.Maier, O.Staffelbach. Nonlinearity criteria for cryptographic functions. In Advances in Cryptology – EUROCRYPT'89, vol.434, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, pp.549-562,1990.